

## О ПРОНОРМАЛЬНОСТИ И СИЛЬНОЙ ПРОНОРМАЛЬНОСТИ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП

М.Н. Нестеров

Новосибирский государственный университет, Механико-математический факультет  
Пирогова 2, 630090 Новосибирск, Россия [mauk00@mail.ru](mailto:mauk00@mail.ru)

Всюду через  $\pi$  обозначается некоторое фиксированное множество простых чисел. Подгруппа  $H$  конечной группы  $G$  называется  $\pi$ -холловой, если она является  $\pi$ -группой (т.е. все простые делители ее порядка лежат в  $\pi$ ), а ее индекс не делится на числа из  $\pi$ . Подгруппа  $H$  называется **холловой** подгруппой, если она является  $\pi$ -холловой для некоторого множества  $\pi$  (эквивалентно, если  $|H|$  и  $|G : H|$  взаимно просты).

Говорят, что подгруппа  $H$  группы  $G$  **пронормальна**, если для любого элемента  $g \in G$  подгруппы  $H$  и  $H^g$  сопряжены в подгруппе  $\langle H, H^g \rangle$ .

В «Коуровской тетради» записана следующая проблема [1, 18.32]: всегда ли холлова подгруппа конечной группы пронормальна в своём нормальном замыкании? Отрицательное решение проблемы даёт следующая

**Теорема.** Пусть множество простых чисел  $\pi$  таково, что

- (1) существует простая группа  $X$ , содержащая более одного класса сопряжённых  $\pi$ -холловых подгрупп;
- (2) существует простая группа  $Y$ , содержащая  $\pi$ -холлову подгруппу, отличную от своего нормализатора в  $Y$ .

Тогда в регулярном сплетении  $G = X \wr Y$  существует непронормальная  $\pi$ -холлова подгруппа, нормальное замыкание которой совпадает с  $G$ .

Условиям теоремы удовлетворяет, например, множество  $\{2, 3\}$ : группа  $X = PSL_3(2)$  содержит два класса сопряжённых  $\{2, 3\}$ -холловых подгрупп и группа  $Y = PSL_2(16)$  содержит  $\{2, 3\}$ -холлову подгруппу, отличную от своего нормализатора в  $Y$ .

Подгруппу  $H$  группы  $G$  называют **сильно пронормальной**, если для любой подгруппы  $K \leq H$  и любого элемента  $g \in G$  подгруппа  $K^g$  сопряжена с некоторой подгруппой из  $H$  (но не обязательно с  $K$ ) с помощью элемента из  $\langle H, K^g \rangle$ .

Получено также отрицательное решение проблемы [1, 17.45(б)]: верно ли, что холловы подгруппы простых групп сильно пронормальны? А именно, показано, что  $PSp_{10}(7)$  содержит  $\{2, 3\}$ -холлову подгруппу, не являющуюся сильно пронормальной. Отметим, что ранее не было известно примеров пронормальных, но не сильно пронормальных холловых подгрупп.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 14-21-00065).

### Литература

1. Коуровская тетрадь: нерешённые вопросы теории групп. Изд. 18. Новосибирск, 2014.